

CORRIGE APPLI : TATARSTAN

Multiplicateur et Diviseur, formules de passage

Le Tatarstan est présenté comme la dernière République à avoir perdu son autonomie pour rejoindre la Fédération de Russie (2017) On connaît dans le document ci-dessous l'évolution depuis 1926 des effectifs des groupes ethniques qui composent le Tatarstan. Mais il manque quelques données (cases vierges). Toutefois on dispose d'une ou de deux informations statistiques (en ligne), permettant de compléter le tableau

Il vous est demandé de retrouver les **valeurs manquantes** (en **valeurs entières**) à l'aide des informations disponibles pour chaque ligne.

Chaque calcul doit être précédé de son **expression algébrique** (la variable étant l'initiale de chaque groupe, ou les deux premières lettres).

Tableau des données à compléter

Groupes ethniques du Tatarstan - Effectifs 1926-2010 - (recensement)								Données : Indicateurs calculés					
Groupes	1926	1939	1959	1970	1979	1989	2002	2010	70-110	26-39	26-70	39-79	39-70
Tatars	1,263,383	1,421,514	1,345,195		1,641,603	1,765,404	2,000,116	2,012,571	${}_{70}TCAM(T)_{110} = 0,677\%$				
Russes		1,250,667	1,252,413	1,382,738	1,516,023	1,575,361	1,492,602	1,501,369		${}_{26}MAM(R)_{39} = 1,0086$	${}_{26}\mu(R)_{70} = 1,2358$		
Tchouvaches	127,33	138,935	143,552	153,496		134,221	126,532	116,252				$I(T)_{79/39} = 105,868$	
Autres (1)	84,485	104,161			140,698	166,756	160,015	150,244					${}_{39}MAM(A)_{70} = 1,0025$

[1] dont : Oudmourth, Mordves, Maris, Ukrainiens... voir source : <https://en.wikipedia.org/wiki/Tatarstan>

NB lire par exemple : 1,263,383 = 1.263,383 soit 1millions 263 mille 383. On appellera alors valeur entière : 1263 ou 1.263. Les calculs doivent être menés sur les valeurs du tableau (non entières). Les résultats dépendent du nombre de décimales retenues pour les indicateurs de croissance. Ils ne doivent cependant pas s'écarter trop fortement de ceux du corrigé.

1) Tatars (T)

L'information disponible est le ${}_{70}TCAM(T)_{110} = 0,677\%$

La valeur manquante est l'effectif en 1970.

Les effectifs de 1926 à 1959 sont donc inutiles. Par contre l'effectif de 2010 est important. On se propose donc de retrouver l'effectif de 1970 connaissant l'effectif de 2010. Ce calcul est classique et utilise **le diviseur ($1/\mu$)**. L'effectif manquant s'écrit en effet :

$$T_{70} = T_{110} \times (1/{}_{70}\mu(T)_{110})$$

Pour trouver le diviseur $1/{}_{70}\mu(T)_{110}$, il faut d'abord déterminer le *multiplicateur associé* (${}_{70}\mu(T)_{110}$), connaissant ${}_{70}TCAM(T)_{110} = 0,677\%$. On utilise pour cela les formules de passage en notant bien que la durée de la période concernée est : $n = 110 - 70 = 40$.

$$({}_{70}\mu(T)_{110}) = ({}_{70}MAM(T)_{110})^n = [({}_{70}TCAM(T)_{110}/100) + 1]^n = (0,00677 + 1)^{40} = (1,00677)^{40} = 1,3098$$

La valeur manquante est donc :

$$T_{70} = T_{110} \times (1/_{70}\mu(T)_{110}) = 2012,571 \times (1/1,3098) = 2013,571 \times 0,76347 = 1537$$

Soit : $T_{70} = 1.537$

2) Russes (R)

Les informations disponibles sont : $_{26}MAM(R)_{39} = 1,0086$ et $_{26}\mu(R)_{70} = 1,23587$
L'effectif manquant est R_{26} , l'effectif en 1926.

Les données (MAM et μ) concernent toutes deux 1926. **Deux possibilités sont donc offertes.**

a) Si $_{26}MAM(R)_{39} = 1,0086$

On se retrouve dans le cas ci-dessus : soit retrouver R_{26} connaissant R_{39} et le $_{26}MAM(R)_{39}$. On sait qu'il faut recourir au *diviseur*, sachant qu'ici la période est $n = 39 - 26 = 13$. Soit :

$$_{26}MAM(R)_{39} = 1,0086, \text{ alors } _{26}\mu(R)_{39} = (_{26}MAM(R)_{39})^n = (_{26}MAM(R)_{39})^{13} = (1,0086)^{13} = 1,1178$$

Le diviseur est donc $(1/_{26}\mu(R)_{39}) = 1/1,1178 = 0,8946$

L'effectif R_{29} est donc égal à :

$$R_{29} = R_{39} \times (1/_{26}\mu(R)_{39}) = 1250,667 \times 0,8946 = 1118.000$$

Soit : $R_{29} = 1.118$

b) Si $_{26}\mu(R)_{70} = 1,23587$

La méthode est identique à celle de a) ci-dessus. Mais elle est préférable, car plus rapide à appliquer. Le diviseur est obtenu immédiatement en inversant $_{26}\mu(R)_{70}$.

$$\text{Soit } (1/_{26}\mu(R)_{70}) = 1/1,23587 = 0,809146$$

L'effectif R_{29} est donc égal à :

$$R_{29} = R_{70} \times (1/_{29}\mu(R)_{70}) = 1382,738 \times 0,809146 = 1118.000$$

Soit : $R_{29} = 1.118$

3) Tchouvaches (TC)

L'information disponible est : $I(TC)_{79/39} = 105,868$ l'indice simple en 1979 base 100 en 1939.
L'effectif manquant est TC_{79} , l'effectif en 1979.

Le principe est : ***on ne raisonne jamais avec l'indice, mais avec le multiplicateur associé.*** On dispose de la formule de passage de l'un à l'autre :

$$_{39}\mu(TC)_{79} = (I(T)_{79/39})/100 = 105,868 / 100 = 1,05868$$

Il est alors aisé d'appliquer à la valeur TC_{39} ce multiplicateur pour trouver la valeur manquante TC_{79} .
Soit L'effectif TC_{79} est donc égal à :

$$TC_{39} \times _{39}\mu(TC)_{79} = 138,935 \times 1,05868 = 147$$

Soit : TC₂₉ = 147

4) Autres (A)

L'information disponible est : ${}_{39}MAM(A)_{70} = 1,0025$

Deux effectifs sont ici manquants : A_{59} , l'effectif en 1959, et A_{70} , l'effectif en 1970.

La méthode consiste à appliquer ${}_{39}MAM(A)_{70} = 1,0025$ à la valeur de départ ($A_{39} = 104,161$) pour trouver successivement A_{59} , puis A_{70} .

Il y a donc deux périodes à considérer $n = 59 - 39 = 20$, puis $n = 70 - 59 = 11$.

L'effectif (A_{59}) s'écrit :

$$A_{59} = A_{39} \times ({}_{59}MAM(A)_{70})^{20} = 104,161 \times (1.0025)^{20} = 104,136 \times 1,0512 = 109$$

Soit : A₅₉ = 109

$$A_{70} = A_{59} \times ({}_{59}MAM(A)_{70})^{11} = 109 \times (1.0025)^{11} = 109 \times 1,0278 = 112$$

Soit : A₇₀ = 112

Le tableau des résultats est finalement :

Groupes ethniques du Tatarstan - Effectifs 1926-2010 - (recensement)								
Groupes	1926	1939	1959	1970	1979	1989	2002	2010
Tatars	1,263,383	1,421,514	1,345,195	1.537	1,641,603	1,765,404	2,000,116	2,012,571
Russes	1118	1,250,667	1,252,413	1,382,738	1,516,023	1,575,361	1,492,602	1,501,369
Tchouvaches	127,33	138,935	143,552	153,496	147	134,221	126,532	116,252
Autres (1)	84,485	104,161	109	112	140,698	166,756	160,015	150,244

(1) dont : Oudmourth, Mordves, Maris, Ukrainiens...) voir source : <https://en.wikipedia.org/wiki/Tatarstan>

Fin du corrigé

-HX-

APPRENDRE A UTILISER L'INDICE (cas 3 ci-dessus)

Retenir pour les sujets en Indice l'exemple simple suivant :

Soit la grandeur V

En t : $V_t = 200$

En (t+n) : $V_{t+n} = \text{Inconnue}$

Si on dispose de l'indice $I(V)_{(t+n)/t} = 126$

On convertit cet Indice en Multiplicateur : ${}_t\mu(V)_{(t+n)} = I(V)_{(t+n)/t} / 100$. Il suffit donc de décaler la virgule de deux rangs à gauche = $126/100 = 1,26$

Alors : $V_{t+n} = V_t \times {}_t\mu(V)_{(t+n)} = 200 \times 1,26 = 252$

Recommandation qui peut sembler de pure forme (décaler la virgule de deux rangs à gauche, lorsqu'on divise par 100 est évident), car on a raisonné avec

$$I(V)_{(t+n)/t} \text{ ET } i_t = 100.$$

Mais elle ne l'est pas. La croissance demandée peut être celle entre deux Indices différents de base différente.

Par exemple, la croissance ci-dessous de t à (t+n) :

temps	t	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	...t+n
$I_{t+n/t}$	100	103,6	104	105,1	106	106,8	...
V_t	200	207,2	208	210,2	212	213,6	...

La valeur V_{t+4} , supposée inconnue, peut en fait être déterminée à l'aide du multiplicateur de l'indice en choisissant **n'importe quelle base**, non nécessairement égale à $t = 100$.

On ne parle plus ici de conversion de l'indice en multiplicateur, mais bien d'un calcul du multiplicateur de l'indice, soit :

${}_t\mu(I)_{t+n} = I_{t+n}/I_t$ et donc $V_{t+n} = V_t \times {}_t\mu(I)_{t+n}$, en choisissant la base que l'on désire.

Par exemple en prenant pour base (t+2) où $I_{t+2} = 104$

$${}_{t+2}\mu(I)_{t+4} = I_{t+4}/I_{t+2} = 106/104 = 1,0192$$

$$\text{D'où : } V_{t+4} = V_{t+2} \times 1,0192 = 208 \times 1,0192 = 212.$$

On peut s'appliquer en changeant la valeur inconnue, et la base de l'Indice.

FIN.